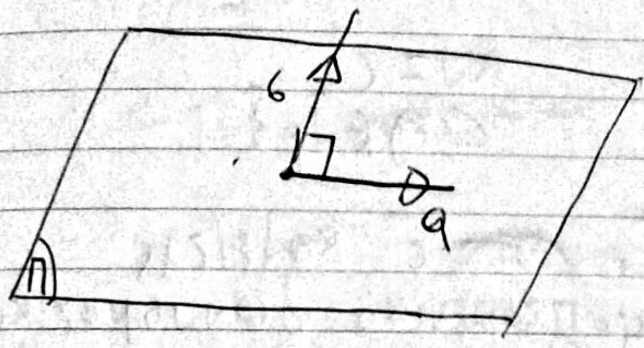
1/3/2016



$X(u,v) = P_0 + u\bar{a} + v\bar{b}$

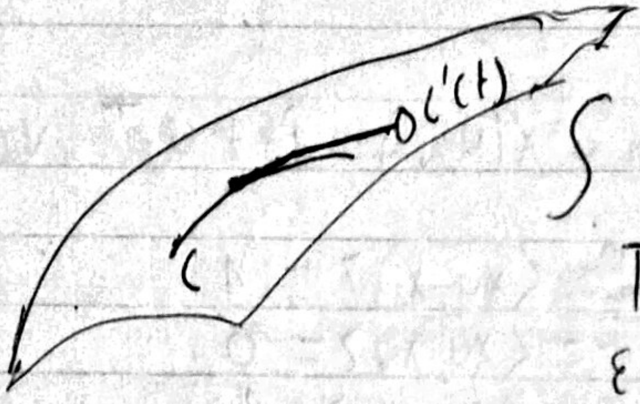
$E = \langle X_u, X_u \rangle = 1$
$F = \langle X_u, X_v \rangle = 0$
$G = \langle X_v, X_v \rangle = 1$

$\Rightarrow \Gamma_{ij}^{k} = 0$ Τότε $\underset{g}{D} W = a'(0) X_u + b'(0) X_v$

Διανυσματικά πεδία κατά μήκος επιφανειακής καμπύλης

Ορισμός: Έστω $c: I \to S$ λεία καμπύλη κανονικής επιφάνειας S. Καλούμε διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο της S κατά μήκος της c κάθε διαφορίσιμη διανυσματική συνάρτηση $w: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ ώστε $\forall t \in I$, $w(t) \in T_{c(t)} S$

Παράδειγμα (διανυσματικό πεδίο κατά μήκος επιφανειακής καμπύλης)



$$\left.\begin{aligned} w &= c' \\ c'(t) &\in T_p \end{aligned}\right\}$$

Το $w = c'$ καλείται εφαπτομενικό διανυσματικό πεδίο της c

<u>Ορισμός:</u> Η συναλλοίωτη παράγωγος του διανυσματικού πεδίου w κατά μήκος της c είναι το διανυσματικό πεδίο $\frac{Dw}{dt}(t) = \left(\frac{dw}{dt}(t)\right)_T$

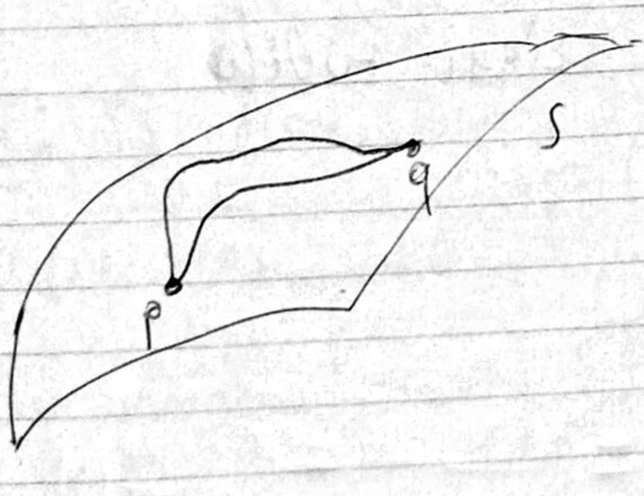
Άρα $\frac{Dw}{dt} = \frac{dw}{dt}(t) - \left\langle \frac{dw}{dt}, N_0 c(t) \right\rangle N_0 c(t)$

<u>Παρατήρηση:</u> Η συναλλοίωτη παράγωγος του w κατά μήκος της c εξαρτάται μόνο από την 1η Θεμελιώδη μορφή (ως προς την επιφάνεια).

Αν $w = a \times u + b \times v = a\bar{a} + b\bar{b}$

$\frac{Dw}{dt} = a'\bar{a} + b'\bar{b}$ Άρα για το επίπεδο η συναλλοίωτη παράγωγος είναι η συνήθης παράγωγος

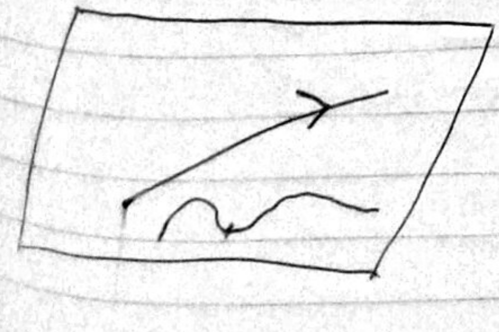
Πρόβλημα (ελαχιστοποίησης μήκους)



Από όλες τις καμπύλες της S με άκρα p, q να βρεθεί εκείνη (αν υπάρχει) με το μικρότερο μήκος

$c(t) = p_0 + tv, \; v \neq 0$

$c'(t) = v, \; \frac{Dc'}{dt} = \frac{dc}{dt} = 0$



Γνωρίζουμε ότι στο επίπεδο οι καμπύλες αυτές είναι οι ευθείες

Αν. c καμπύλη του επιπέδου $(c: I \to \Pi)$

με $\frac{Dc'}{dt} = 0 \Leftrightarrow c'' = 0$

$\Rightarrow c'(t) = v \Rightarrow c(t) = P_0 + tv$

• Συμπέρασμα: Μια κανονική καμπύλη $c(t)$ ενός επιπέδου είναι ευθεία $\Leftrightarrow \frac{Dc'}{dt} = 0$

Γεωδαισιακές (γεωδαιτικές) μιας επιφάνειας

Ορισμός: Μια λεία καμπύλη $c: I \subseteq \mathbb{R} \to S$ κανονικής επιφάνειας S καλείται γεωδαισιακή της S αν-ν $\frac{Dc'}{dt}(t) = 0 \quad \forall t \in I$

• Παράλληλα διανυσματικά πεδία κατά μήκος καμπύλης

Ορισμός: Το διανυσματικό πεδίο w κατά μήκος της επιφανειακής καμπύλης c της S καλείται παράλληλο $\Leftrightarrow \frac{Dw}{dt}(0) = 0 \quad \forall t \in I$

1) Παράδειγμα:

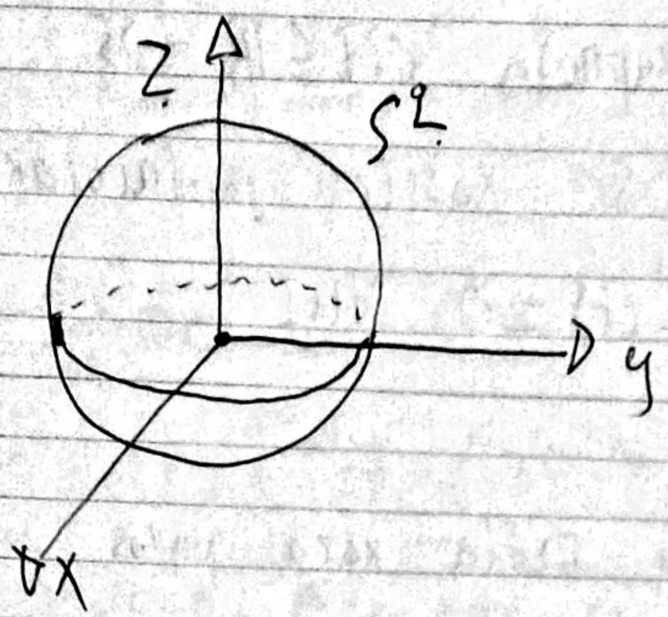
Το w παράλληλο

$\Leftrightarrow \frac{Dw}{dt} = 0$

$\Leftrightarrow \frac{dw}{dt} = 0$

$\Leftrightarrow w =$ σταθερό

2) Παράδειγμα διανυσματικού πεδίου που είναι παράλληλο



Θεωρώ την καμπύλη $c: \mathbb{R} \to S^2$ με

$c(t) = (\cos t, \sin t, 0)$ Θεωρώ $W = c'$

$W(t) = (-\sin t, \cos t, 0)$

$$\frac{DW}{dt}(t) = \left(\frac{DW}{dt}\right)^T = \frac{dW}{dt}(t) - \left\langle \frac{dW}{dt}(t), N(c(t)) \right\rangle N(c(t))$$

$$S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x^2+y^2+z^2 = 1\} = f^{-1}(0)$$

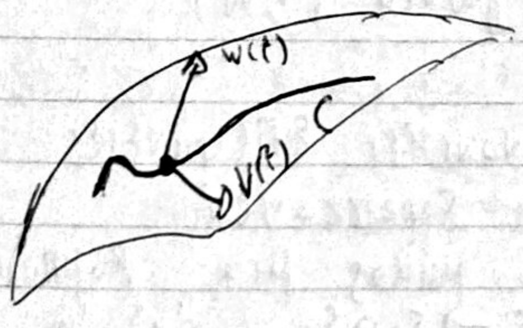
$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1$

$$N(x,y,z) = \frac{\operatorname{grad} f}{\|\operatorname{grad} f\|} = (x,y,z)$$

Τότε $\frac{Dw}{dt} = (-\cos t, \sin t, 0) - \langle (-\cos t, \sin t, 0), (\cos t, \sin t, 0) \rangle (\cos t, \sin t, 0)$

$= 0 \Rightarrow w = c'(t)$ είναι παράλληλο $\Rightarrow c$ γεωδαισιακή της S^2

Πρόταση: Έστω V, W διανυσματικά πεδία κατά μήκος καμπύλης $c: I \to S$ κανονικής επιφάνειας S.



$$\frac{d}{dt}\langle V, W \rangle = \left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt} \right\rangle$$

Απόδειξη: $\frac{d}{dt}\langle V, W \rangle = \left\langle \frac{dV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{dW}{dt} \right\rangle \quad (1)$

Όμως $\frac{DV}{dt} = \left(\frac{dV}{dt}\right)_T = \frac{dV}{dt} - \left\langle \frac{dV}{dt}, N \right\rangle N$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{DV}{dt} + \left\langle \frac{dV}{dt}, N \right\rangle N$$

$(1) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\langle v,w\rangle = \langle \frac{Dv}{dt} + \langle \frac{\partial v}{\partial t}, N\rangle N, w\rangle$

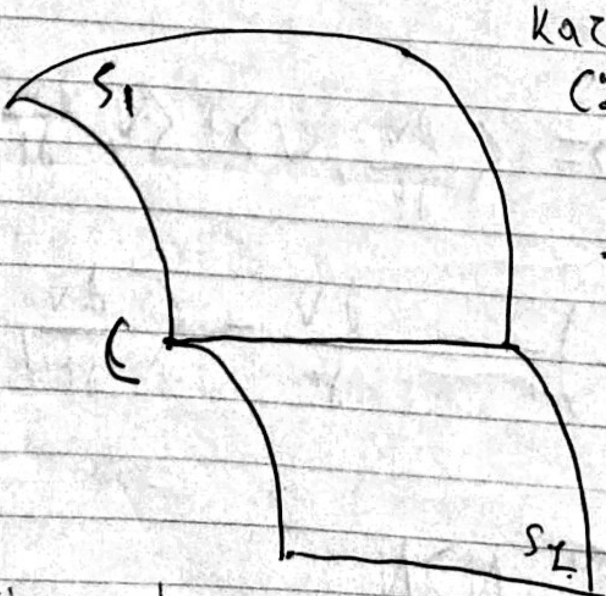
$+ \langle v, \frac{Dw}{dt} + \langle \frac{\partial w}{\partial t}, N\rangle N\rangle = \langle \frac{Dv}{dt}, w\rangle + \langle v, \frac{Dw}{dt}\rangle$

<u>Πόρισμα</u>: Αν v και w παράλληλα διανυσματικά πεδία κατά μήκος μιας καμπύλης c τότε i) $|v| =$ σταθερό $= |w|$

ii) $\langle v,w\rangle =$ σταθερό iii) $\angle(v,w) =$ σταθερό

γωνία (v,w)

• Παρατήρηση: Εστω S_1, S_2 κανονικές επιφάνειες οι οποίες εφάπτονται κατά μήκος μια καμπύλη $c: I \to S_1 \cap S_2$ δηλαδή $\forall t \in I \quad T_{c(t)}S_1 = T_{c(t)}S_2$

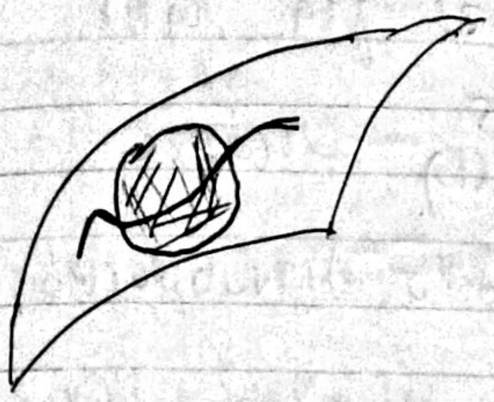


Τότε $\frac{D^1 w}{dt} = \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)$ εφαπτομενική συνιστώσα στην S_1

$\frac{D^2 w}{dt} = \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)$ εφαπτομενική συνιστώσα στην S_2

Τότε όμως $\frac{D^1 w}{dt} = \frac{D^2 w}{dt}$

• Υπάρχουν παράλληλα διανυσματικά πεδία;



$c(t) = X(u(t), v(t))$. Θεωρώ

και $w = aX_u + bX_v$ διανυσματικό πεδίο κατα μήκος της c

$$\frac{Dw}{dt} = \left(a' + \Gamma_{11}^1 a u' + \Gamma_{12}^1 a v' + \Gamma_{12}^1 b u' + \Gamma_{22}^1 b v'\right)$$

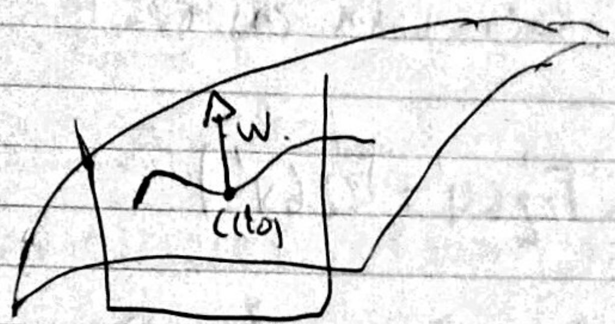
$$+ \left(b' + \Gamma_{11}^2 a u' + \Gamma_{12}^2 a v' + \Gamma_{12}^2 b u' + \Gamma_{22}^2 b v'\right)$$

Το w παράλληλο κατα μήκος της $c \Leftrightarrow \frac{Dw}{dt} = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a' + \Gamma_{11}^1 a u' + \Gamma_{12}^1 a v' + \Gamma_{12}^1 b u' + \Gamma_{22}^1 b v' = 0 \\ b' + \Gamma_{11}^2 a u' + \Gamma_{12}^2 a v' + \Gamma_{12}^2 b u' + \Gamma_{22}^2 b v' = 0 \end{cases}$$

γραμμικό σύστημα με αγνώστους a και b

<u>Πρόταση:</u> Έστω $c: I \subset \mathbb{R} \to S$ επιφανειακή καμπύλη της S και $t_0 \in I$. Τότε για κάθε $w \in T^S_{c(t_0)}$ υπάρχει μοναδικό διανυσματικό πεδίο W κατά μήκος της c ώστε $W(t_0) = w$



Το W καλείται παράλληλη μεταφορά του w κατά μήκος της c

Παρατήρηση: Αν $c: I \to S$ γεωδαισιακή τότε $\|c'\| = $ σταθερό

Παρατήρηση: Αν αναπαραμετρήσουμε μια γεωδαισιακή καμπύλη δεν θα πάρουμε απαραίτητα γεωδαισιακή καμπύλη

Στο επίπεδο, οι ευθείες $c(t) = P_0 + tv$ είναι γεωδαισιακή όμως $\tilde{c}(t) = P_0 + t^3 v$ δεν είναι γεωδαισιακή

Έστω $c: I \to S$ γεωδαισιακή με $\|c'\| = a > 0$ = σταθερή

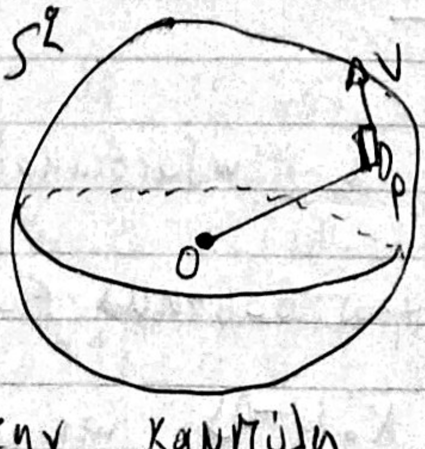
Το μήκος τόξου είναι $s = s(t) = \int_{t_0}^{t} \|c'\| = \int_{t_0}^{t} a$

$s = a(t - t_0) \Rightarrow$ Η παράμετρος t είναι γραμμική συνάρτηση του μήκους τόξους

· Αν $c(t)$ γεωδαισιακή, τότε $\tilde{c}(t) = c(at)$.

$$(\tilde{c}(t))' = a\,c'(at)$$

<u>Παρατήρηση</u>: Η καμπύλη $c: I \to S$ είναι γεωδαισιακή αν-ν $c'(t) \,//\, N(c(t))$ $\forall t \in I$



Θεωρώ $p \in S^2$ και $v \in T_pS^2 \setminus \{0\}$

Θεωρώ την καμπύλη $c: \mathbb{R} \to S^2$ με

$$c(t) = \cos(|v|t)p + \sin(vt)\frac{v}{|v|}$$

Η c είναι μέγιστος κύκλος με

$c(0)=p$, $c'(t) = -|v| \sin(|v|t)p + \cos(|v|t)v$

$c'(0)=v$, $c''(t) = -|v|^2 \cos(|v|t)p - |v|| \sin(|v|t)v$

$$\frac{Dc'}{dt} = c'' - \langle c'', N\circ c\rangle N\circ c \qquad = -|v|^2(\cos(|v|t) - \sin(|v|t)\ldots$$

$$= -|v|^2 c(t)$$

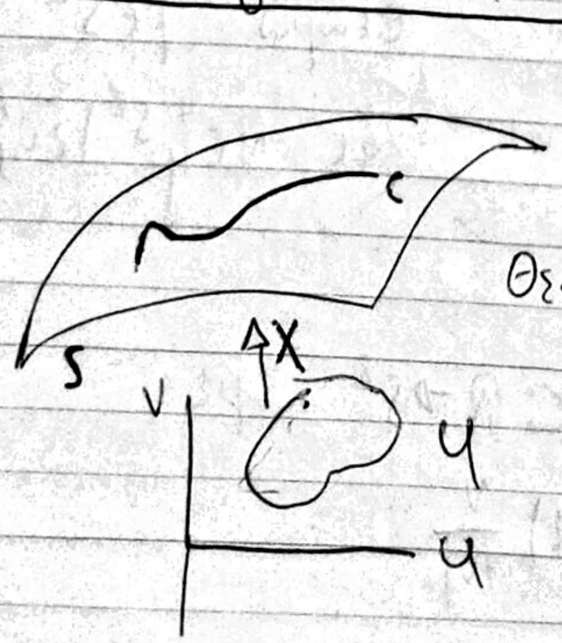
$$= -|v|^2 N(c(t))$$

$\Rightarrow$ Η c είναι γεωδαισιακή της S^2

- Συμπέρασμα: Όλοι οι μέγιστοι κύκλοι της S^2 με την κατάλληλη παραμέτρηση είναι γεωδαισιακοί

είναι οι μόνες ή υπάρχουν κι άλλες;

<u>Εύρεση γεωδαισιακών</u>



c γεωδαισιακοί $\Leftrightarrow \frac{Dc'}{dt} = 0$

Θεωρώ σύστημα συντεταγμένων $X: U \to S$ και $c(I) \subset X(U)$

Τότε $c(t) = X(u(t), v(t))$

$$c'(t) = \underbrace{u'}_{a} X_u(\ldots) + \underbrace{v'}_{b} X_v(\ldots)$$

$W = a X_u + b X_v$

$$\frac{DW}{dt} = \left(a' + \Gamma_{11}^1 a u' + \Gamma_{12}^1 a v' + \Gamma_{12}^1 b u' + \Gamma_{22}^1 b v'\right) X_u$$

$$+ \left(b' + \Gamma_{11}^2 a u' + \Gamma_{12}^2 a v' + \Gamma_{12}^2 b u' + \Gamma_{22}^2 b v'\right) X_v$$

Άρα $$\frac{Dc'}{dt} = \left(u'' + \Gamma_{11}^1 (u')^2 + 2\Gamma_{12}^1 u'v' + \Gamma_{22}^1 (v')^2\right) X_u$$

$$+ \left(v'' + \Gamma_{11}^2 (u')^2 + 2\Gamma_{12}^2 u'v' + \Gamma_{22}^2 (v')^2\right) X_v$$

Τα X_u, X_v είναι βάση άρα $\frac{Dc'}{dt} = 0 \Leftrightarrow$

οι συντελεστές των X_u, X_v κάνουν 0

Συμπέρασμα: Η επιφανειακή καμπύλη $c(t) = X(u(t), v(t))$ είναι γεωδαισιακή αν-ν

$$\begin{cases} u'' + \Gamma_{11}^1 (u')^2 + 2\Gamma_{12}^1 u'v' + \Gamma_{22}^1 (v')^2 = 0 \\ v'' + \Gamma_{11}^2 (u')^2 + 2\Gamma_{12}^2 u'v' + \Gamma_{22}^2 (v')^2 = 0 \end{cases}$$

Θεώρημα: Για κάθε σημείο p κανονικής επιφάνειας S και $v \in T_pS$ τότε υπάρχει μοναδική γεωδαισιακή $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ με $\gamma(0) = p$ και $\gamma'(0) = v$

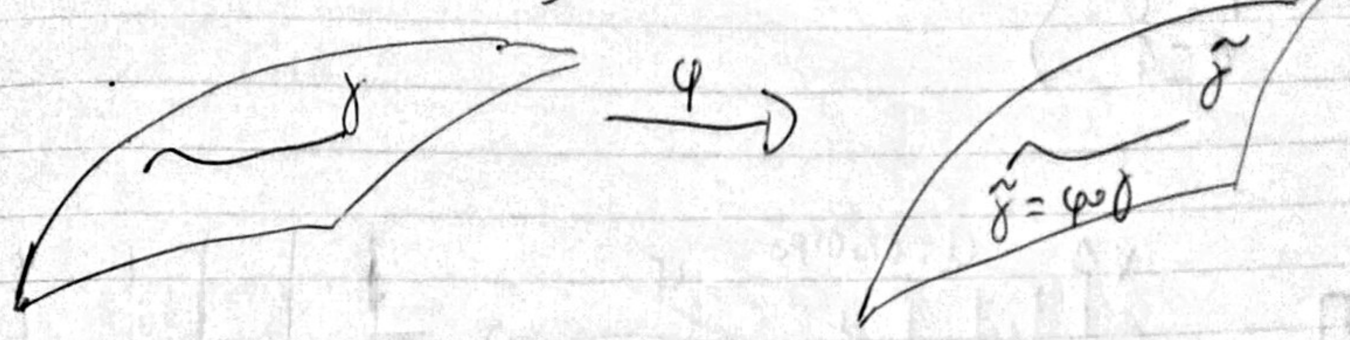
Έστω $\gamma: I \to S^2$ γεωδαισιακή της S^2 με $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = v$

Τότε $c(t) = \cos(|v|t)p + \sin(|v|t) \dfrac{v}{|v|}$

c γεωδαισιακή μ $c(0) = p$, $c'(0) = v$

Πόρισμα: Όλες οι γεωδαισιακές της σφαίρας είναι μέγιστος κύκλος με κατάλληλη παραμέτρηση.

<u>Θεώρημα:</u> Έστω φ (τοπική) ισομετρία, με $\varphi: S \to \tilde{S}$, μεταξύ κανονικών επιφανειών S και $\tilde{S}$. Αν γ γεωδαισιακή της S



τότε η $\tilde{\gamma} = \varphi \circ \gamma$ είναι γεωδαισιακή της $\tilde{S}$

Γεωδαισιακές του ορθού κυκλικού κυλίνδρου

$$S = \{(x,y,z) \,/\, x^2 + y^2 = r^2\}$$

Θεωρώ το σύστημα συντεταγμένων

$$X: U \to S, \quad X(u,v) = \left(r\cos\left(\frac{u}{r}\right), \sin\left(\frac{u}{r}\right), v\right)$$

Τότε $X_u = \left(-\sin\left(\frac{u}{r}\right), \cos\left(\frac{u}{r}\right), 0\right)$

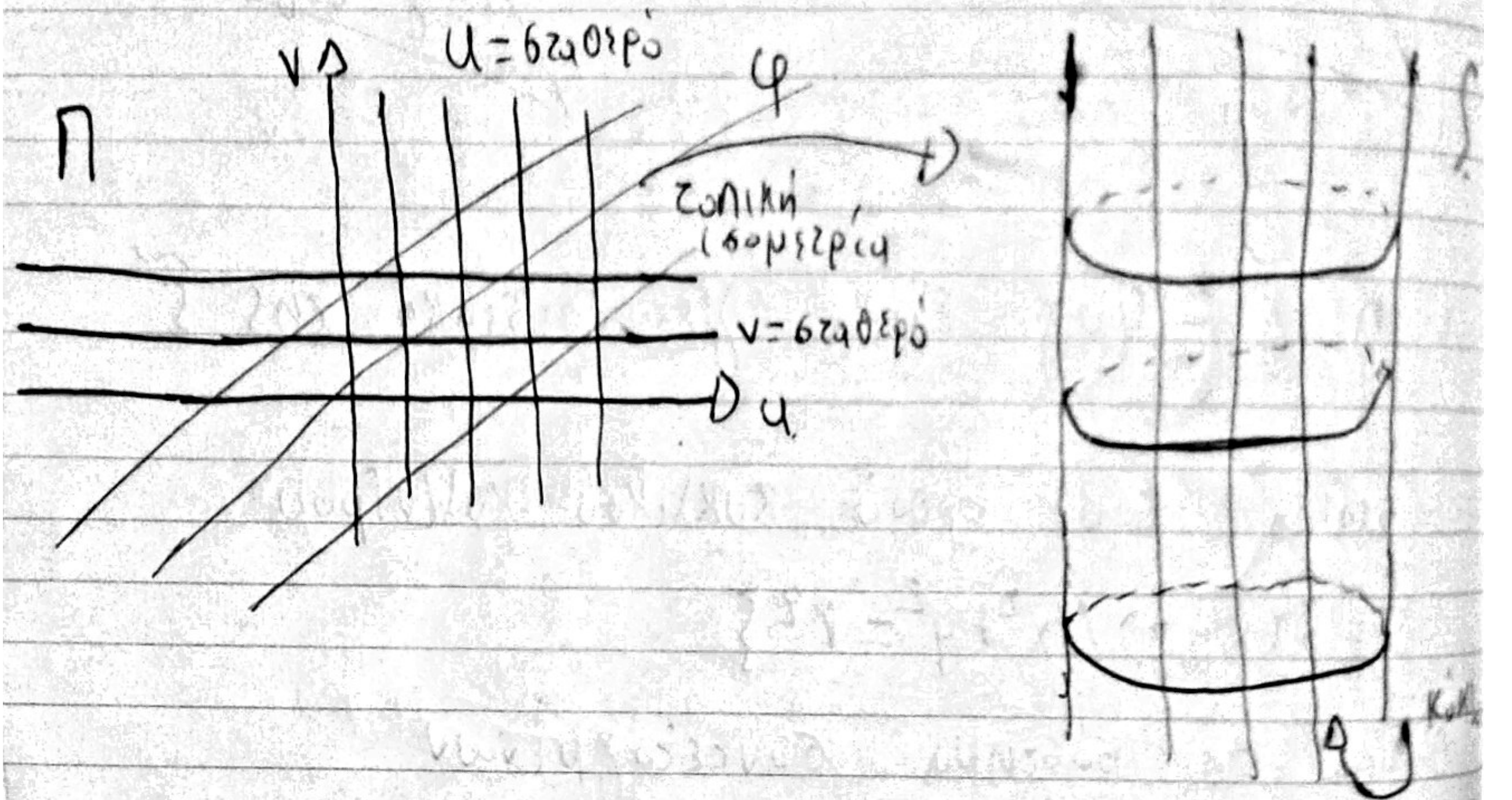
$X_v = (0, 0, 1)$

$E = \|X_u\|^2 = 1$
$F = \langle X_u, X_v \rangle = 0$
$G = \|X_v\|^2 = 1$

Αν $S = \Pi : z = 0$

$\tilde{X} : U \to S \quad X(u,v) = (u, v, 0)$

$\left.\begin{array}{l} \tilde{E} = 1 \\ F = 0 \\ G = 1 \end{array}\right\}$



- Οι κύκλοι με κατάλληλη παραμέτρηση είναι γεωδαισιακές του κυλίνδρου

$$X(u, v = v_0) = \left(r\cos\left(\frac{u}{r}\right), r\sin\left(\frac{u}{r}\right), v_0\right)$$

- Οι ευθείες με κατάλληλη παραμέτρηση είναι γεωδαισιακές του κυλίνδρου

$$X(u = u_0, v) = \left(r\cos\left(\frac{u_0}{r}\right), r\sin\left(\frac{u_0}{r}\right), v\right)$$

• $v = \lambda u + a$

$$X(u, \lambda u + a) = \left(r\cos\left(\frac{u}{r}\right), r\sin\left(\frac{u}{r}\right), \lambda u + a\right)$$

γεωδαισιακές του κυλίνδρου οι οποίες είναι

κυλινδρικές έλικες